

ANÁLISE DINÂMICA NÃO AMORTECIDA DE VIGAS UTILIZANDO O ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO REGULAR SIMPLES.

Francisco Quim, Rogério de Oliveira Rodrigues, Aline Fabiana Faglioni. – Engenharia Civil - Departamento de Engenharia Civil – Faculdade de Engenharia – Campus de Ilha Solteira.

A análise do comportamento dinâmico de sistemas estruturais é, sem dúvida, um dos principais objetivos almejados pelo Engenheiro de Estruturas. Para isso, ao se analisar ou projetar uma estrutura é necessário que se tenha uma idéia bastante clara da natureza e da intensidade das forças aplicadas. Quando se considera carregamentos variando com o tempo, a análise dinâmica visa quantificar a magnitude dos esforços internos, dos deslocamentos, das velocidades e das acelerações que se manifestam no sistema estrutural. Como exemplos desses carregamentos podem ser citados, entre outros, a incidência do vento sobre edifícios altos, sismos, frenagem e aceleração de veículos em pontes e movimentação de pessoas sobre lajes. Tal análise deve fornecer uma ampla gama de resultados numéricos compatíveis com os carregamentos aplicados, cuja avaliação de forma qualitativa permitirá a sua utilização na elaboração do projeto estrutural do sistema analisado.

Atualmente o Método dos Elementos Finitos (MEF) vem sendo largamente empregado, dentre outras áreas, na análise dinâmica de estruturas. O conceito básico do MEF é tal que um contínuo (o sistema estrutural) pode ser modelado analiticamente pela sua subdivisão em pequenas regiões (os elementos finitos). Esses elementos são interconectados entre si e com o meio externo através de pontos nodais situados em seu contorno. Por ser um método de discretização, a solução obtida é aproximada e para se obter uma resposta satisfatória, usualmente, deve-se escolher o tipo adequado de elemento finito, a quantidade e a disposição geométrica do mesmo. A definição do tipo apropriado de elemento finito é dada em função do sistema estrutural que se deseja analisar, desse modo, entre os elementos para análise de vigas destaca-se, pela sua simplicidade, o elemento finito prismático regular linear. Dentro desse contexto, o objetivo principal deste trabalho é a análise do comportamento dinâmico de vigas, através da discretização estrutural feita com o elemento finito prismático regular linear. Tal elemento é caracterizado por ter duas bases paralelas, inferior e superior, compostas por retângulos, com as arestas laterais perpendiculares às bases, cuja particularidade é dada pela variação linear dos deslocamentos que ocorrem ao longo de qualquer aresta do elemento, conforme é apresentado na Figura 1.

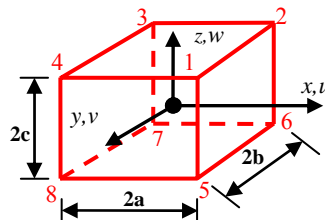


Figura 1 – Elemento finito prismático regular com oito nós.

Na análise do problema via MEF, os deslocamentos dos pontos nodais são os parâmetros básicos desconhecidos do problema. Um conjunto de funções deve, então, ser escolhido para definir o estado de deslocamento de cada elemento, em função dos seus deslocamentos nodais. Essas funções são chamadas de funções de forma do elemento. A partir dessas funções pode-se definir o estado de deformação do elemento, que, junto com as deformações iniciais e com as propriedades constitutivas do material, definirão o estado de tensão em todo o elemento e também no seu contorno. Para o elemento em estudo, as funções de forma contêm oito monômios extraídos do polinômio algébrico cúbico completo em x , y e z . Nesse caso, para garantir a continuidade com os deslocamentos dos elementos adjacentes, a função deslocamento deve variar linearmente ao longo dos lados. Sendo assim, para um sistema de coordenadas adimensionais com origem no centróide do elemento, ou seja:

$$\xi = \frac{x}{a} ; \quad \eta = \frac{y}{b} ; \quad \zeta = \frac{z}{c} \quad (1)$$

as funções interpoladoras para os deslocamentos u , v e w , são dadas pelas equações (2), (3) e (4), respectivamente.

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi \zeta + \alpha_6 \eta \zeta + \alpha_7 \xi \eta \zeta \quad (2)$$

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta + \beta_4 \xi \eta + \beta_5 \xi \zeta + \beta_6 \eta \zeta + \beta_7 \xi \eta \zeta \quad (3)$$

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta + \gamma_4 \xi \eta + \gamma_5 \xi \zeta + \gamma_6 \eta \zeta + \gamma_7 \xi \eta \zeta \quad (4)$$

Para a análise dinâmica tendo como base o Método dos Elementos Finitos, efetuando-se o equilíbrio de todos os esforços atuantes em um sistema estrutural arbitrário e aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, obtém-se a equação geral do equilíbrio para sistemas discretos em movimento, dada pela Equação (5):

$$\underset{\sim}{m} \ddot{\underset{\sim}{d}} + \underset{\sim}{c} \dot{\underset{\sim}{d}} + \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{f}_E(t) \quad (5)$$

onde

$$\underset{\sim}{m} = \int_{V_e} \underset{\sim}{\rho} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{\phi} dV_e \quad (6)$$

$$\underset{\sim}{c} = \int_{V_e} \underset{\sim}{\mu} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{\phi} dV_e \quad (7)$$

$$\underset{\sim}{k} = \int_{V_e} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} dV_e \quad (8)$$

$$\underset{\sim}{f}_E(t) = \int_{V_e} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_{V_e} dV_e + \int_{S_e} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_{S_e} dS_e + \sum_i^{nc} \underset{\sim}{p}_{C_i} \quad (9)$$

Para todo o sistema estrutural discreto, utilizando-se o processo de expansão e acumulação, obtém-se a equação geral do movimento dada pela Equação (10):

$$\underset{\sim}{M} \ddot{\underset{\sim}{D}} + \underset{\sim}{C} \dot{\underset{\sim}{D}} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{F}_E(t) \quad (10)$$

onde o primeiro termo corresponde às forças inerciais (massa vezes aceleração), o segundo às forças dissipativas (amortecimento vezes velocidade), o terceiro às forças restauradoras (rigidez vezes deslocamento) e após a igualdade as forças externas aplicadas em função do tempo. Com a definição das funções de forma já descritas anteriormente pode-se deduzir a matriz de rigidez e de massas do elemento finito em estudo, sendo esta última apresentada pela Equação 11. Já o amortecimento viscoso poderá ser introduzido por meio de frações específicas do amortecimento crítico, sendo a integração numérica ao longo do tempo feita através do método de *Newmark* β .

$$\underset{\sim}{m} = \frac{V\rho}{216} \times \begin{bmatrix} 8I_3 & 4I_3 & 2I_3 & 4I_3 & 4I_3 & 2I_3 & I_3 & 2I_3 \\ 4I_3 & 8I_3 & 4I_3 & 2I_3 & 2I_3 & 4I_3 & 2I_3 & I_3 \\ 2I_3 & 4I_3 & 8I_3 & 4I_3 & I_3 & 2I_3 & 4I_3 & 2I_3 \\ 4I_3 & 2I_3 & 4I_3 & 8I_3 & 2I_3 & I_3 & 2I_3 & 4I_3 \\ 4I_3 & 2I_3 & I_3 & 2I_3 & 8I_3 & 4I_3 & 2I_3 & 4I_3 \\ 2I_3 & 4I_3 & 2I_3 & I_3 & 4I_3 & 8I_3 & 4I_3 & 2I_3 \\ I_3 & 2I_3 & 4I_3 & 2I_3 & 2I_3 & 4I_3 & 8I_3 & 4I_3 \\ 2I_3 & I_3 & 2I_3 & 4I_3 & 4I_3 & 2I_3 & 4I_3 & 8I_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

A codificação de tal matriz de massas em uma nova rotina permitiu a análise do comportamento dinâmico de vigas carregadas axialmente, como pode ser visto através dos exemplos elucidativos expostos a seguir.

Primeiramente estudando-se o comportamento de uma viga composta por um único elemento, sendo engastada uma das extremidades e sujeita a um esforço axial de $F = 2,5 \text{ kN}$ aplicado em cada nó de extremidade, conforme apresentado na Figura 2. Cabe ressaltar que o comportamento adotado é elástico linear e o carregamento é aplicado de forma constante ao longo do tempo. Já as características físicas do elemento são dadas por $E = 21000,0 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,0$ e $\gamma = 7,70 \cdot 10^{-5} \text{ kN/cm}^3$.

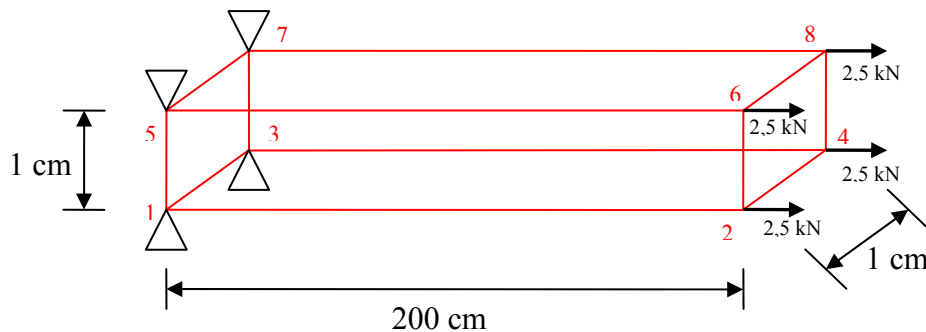


Figura 2 – Viga engastada composta por um elemento sólido e submetida ao esforço axial.

Com o valor de $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ foi possível descrever o comportamento dinâmico não amortecido da viga, visto que tal problema possui um grau de liberdade e tem como resposta uma senóide, conforme ilustra a Figura 3.

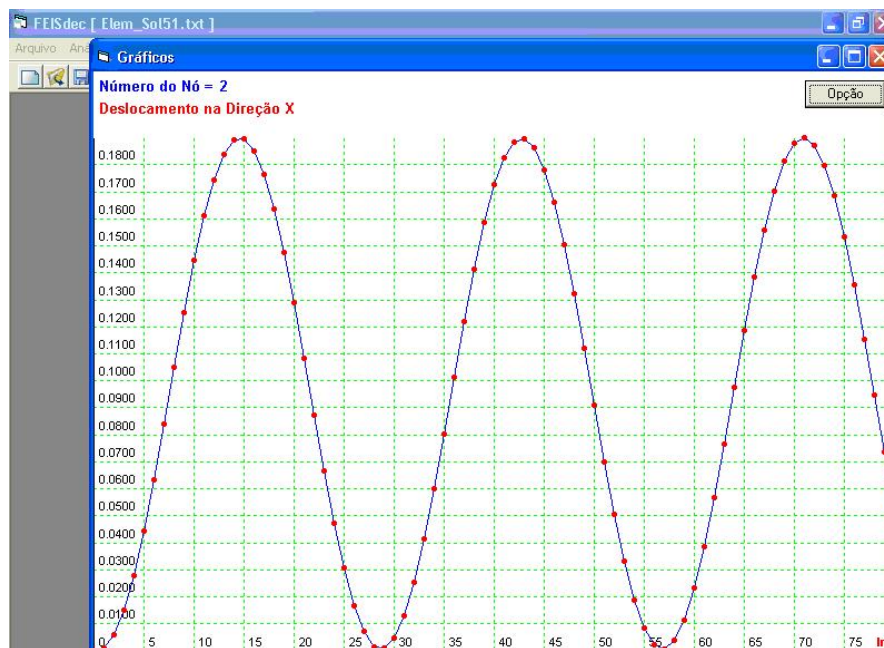


Figura 3 – Resposta dinâmica não amortecida de viga submetida ao esforço axial, composta apenas por um elemento, com deslocamento máximo igual a 0,189 cm.

Em seguida, considerando-se, novamente, comportamento elástico linear, faz-se agora uma divisão da viga mostrada na Figura 2 em doze elementos finitos sequenciais ao longo do comprimento. As figuras 4 e 5 mostram o comportamento dinâmico de tal estrutura. Analisando-se tais figuras percebe-se que o deslocamento máximo do meio do vão é duas vezes menor que o deslocamento máximo do nó de extremidade, por estar situado exatamente na metade do vão. Comparando-se, agora, os gráficos contidos nas figuras 3 e 5, os valores dos deslocamentos máximos observados são

praticamente coincidentes, embora cada curva apresente comportamento diferente em função da nova estrutura possuir vários graus de liberdade.

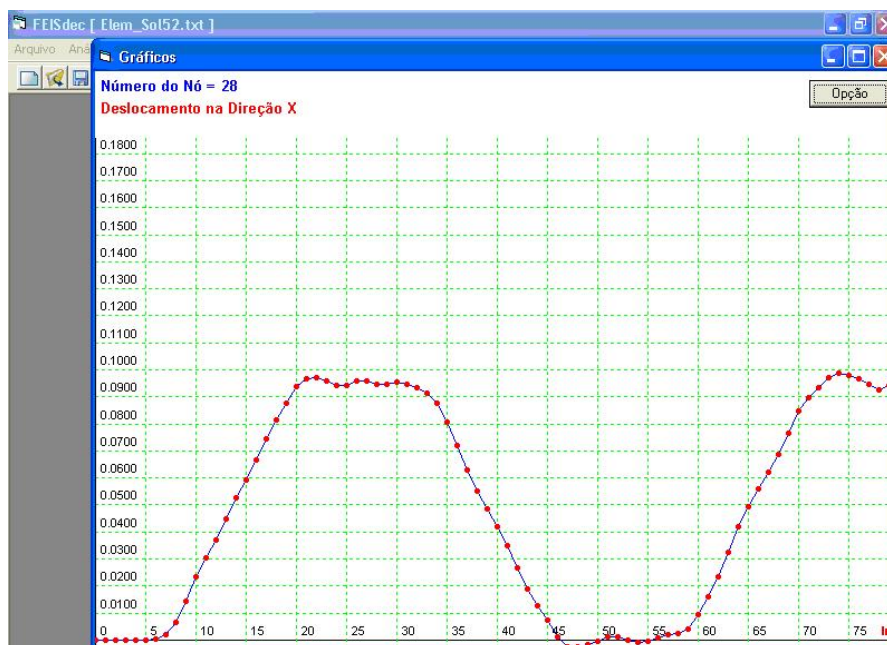


Figura 4 – Resposta dinâmica não amortecida no meio do vão da viga submetida ao esforço axial, composta por doze elementos.

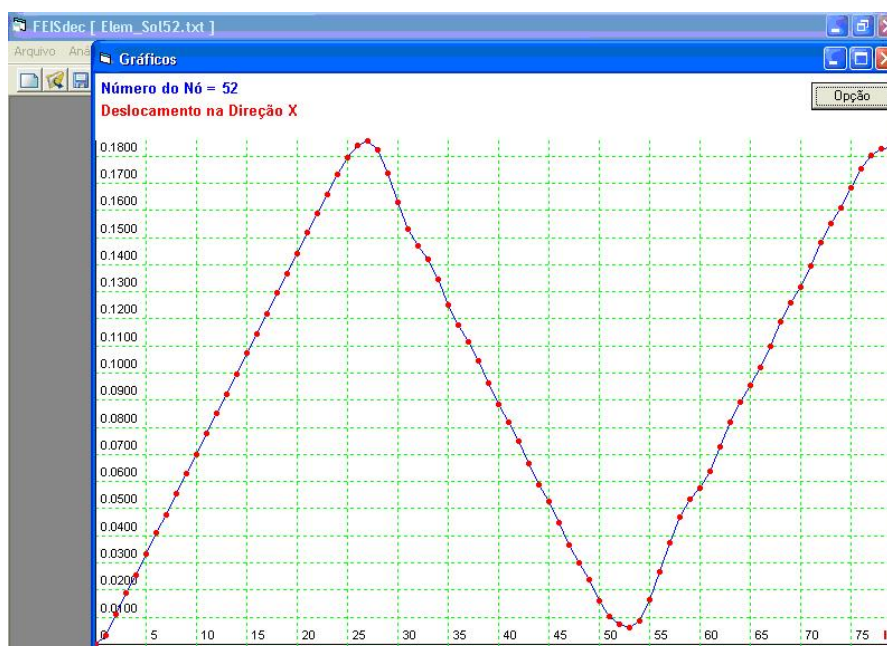


Figura 5 – Resposta dinâmica não amortecida na extremidade da viga submetida ao esforço axial, composta por doze elementos.

Finalizando, a codificação da matriz de massas no programa institucional *FEISdec* – *Finite Element for Idealization of Structures: development and execution by computer* – permitiu a obtenção da resposta exata esperada, propiciando, no futuro, a análise dinâmica de sistemas estruturais mais complexos, inclusive com amortecimento. Tal programa visa auxiliar a comunidade acadêmica, no âmbito da graduação e da pós-graduação da própria Faculdade de Engenharia, na análise dinâmica de sistemas estruturais complexos.

Bolsa: FAPESP